

**EXAMEN TERMINAL DE PHYSIQUE ATOMIQUE ET SUBATOMIQUE**

Lundi 25 juin 2012 - Durée 1h 30

TOUT DOCUMENT INTERDIT – PARTIES INDEPENDANTES

**Interaction Electron-champs Electrique**

On considère un atome d'hydrogène, interagissant avec une onde électromagnétique. Cette interaction induit plusieurs forces sur l'électron. Une force d'interaction avec le champ ( $qE$ ) qui tend à « éloigner » l'électron et une force de rappel ( $Ar$ ) qui tend à le faire osciller sur son orbite à la manière d'un oscillateur harmonique (vision classique).

Le Hamiltonien du système s'écrit :  $H = H_0 + H_E + H_{\text{rap}}$

où  $H_0$  est le Hamiltonien non perturbé de l'atome,  $H_E$  le Hamiltonien d'interaction avec le champ  $E$  et  $V(r^2)$  le Hamiltonien associé à la force de rappel. Dans cet exercice, nous allons intéresser uniquement au hamiltonien associé à la force de rappel  $V(r^2)$  induite par l'onde électromagnétique et comparer la description classique à la description quantique de cette oscillation en supposant  $H_E \ll H_{\text{rap}}$ .

*Traitement Classique*

La solution générale de l'équation du mouvement pour un oscillateur harmonique s'écrit :

$$q_{\text{classique}} = A \sin(\omega t + \delta)$$

1. Quel est la nature du mouvement. (Période, déphasage...)
2. Donner l'expression de l'impulsion  $p$  pour cet oscillateur de masse  $m$ .
3. Donner l'expression de l'énergie mécanique du système  $E_{\text{classique}}$ . La constante de rappel est incluse dans  $A$ .
4. Donner les valeurs moyennes  $q_{\text{classique}}$ ,  $p_{\text{classique}}$  par rapport au temps. On les notera  $\langle q \rangle_c$  et  $\langle p \rangle_c$ .
5. Donner les valeurs moyennes  $\langle q^2 \rangle$  et  $\langle p^2 \rangle$  en fonction de  $E_{\text{classique}}$  trouvées à la question 3, et montrer que les énergies cinétique moyenne et potentielle moyenne de l'oscillateur sont égales.

*Traitement Quantique de l'oscillateur*

Le Hamiltonien de l'électron soumis à la force de rappel s'écrit :

$$H_{\text{rap}} = 1/2(P^2 + Q^2) \text{ avec } Q = q(m\omega/\hbar)^{1/2} \text{ et } P = p(1/m\hbar\omega)^{1/2}.$$

Soient  $|n\rangle$  les états propres associés à l'oscillateur. Les énergies du système s'écrivent  $E_n = (n+1/2)\hbar\omega$ . Contrairement au cas classique, les observables impulsions  $p$  et position  $q$  n'ont pas de valeurs définies. Elles sont dans cette description quantique associées à des distributions statistiques.

1. Soient les opérateurs  $a = (1/2)^{1/2}[Q + iP]$  et  $a^+ = (1/2)^{1/2}[Q - iP]$ . Exprimer  $H$  en fonction  $a$  et  $a^+$ . On donnera également l'expression de  $q$  et de  $p$  en fonction de  $a$  et  $a^+$ .

Les valeurs propres de  $a$  et  $a^+$  dans la base des  $\{|n\rangle\}$  s'écrivent :

$$a^+ |n\rangle = (n+1)^{1/2} |n+1\rangle \quad (1)$$

$$a |n\rangle = n^{1/2} |n-1\rangle \quad (2)$$

- Donner l'expression, en notation de Dirac, des éléments de matrice associés à  $p$  et à  $q$  sur la base des états propres  $\{|n\rangle\}$ . Quels sont les éléments de matrice correspondant aux valeurs moyennes de  $\langle p \rangle$  et  $\langle q \rangle$  les calculer. Comparer au cas classique.
- Que vaut  $\langle n|n' \rangle$ ? En déduire l'expression des éléments de matrice  $\langle n|q^2|n' \rangle$  et  $\langle n|p^2|n' \rangle$  en fonction de  $E_n$ .
- Comparer au cas classique et discuter de l'équivalence quantique / classique pour l'oscillateur.

### Structure hyperfine sur les états $n = 2$ du deutérium

Le deutérium est un isotope de l'hydrogène dont le noyau est composé d'un proton et d'un neutron. Le spin nucléaire est égal à 1.

- Etablir l'expression générale de la correction énergétique due à l'interaction hyperfine à appliquer à un niveau de structure fine ( $n, l, j$  donnés). L'interaction hyperfine  $H_{HF} = A \vec{I} \cdot \vec{J}$  est considérée comme une perturbation,  $\vec{I}$  désignant le spin nucléaire. On définit le moment cinétique total  $\vec{F}$  tel que  $\vec{F} = \vec{I} + \vec{J}$ .
- Faire le recensement des états  $n = 2$  en tenant compte de la structure hyperfine. Calculer les valeurs de  $A \hbar^2$  en MHz.
- Calculer les valeurs numériques -en MHz- de la correction énergétique associée à l'interaction hyperfine pour les états  $n = 2$ .
- Pour les états  $n = 2$  de même  $j$  mais de  $l$  différents, il existe un écart énergétique de 1059 MHz -effet Lamb-, essentiellement dû à l'augmentation d'énergie de l'état  $l$  le plus faible. En tenant compte de tous les effets énoncés ci-dessus – effets de structures fine, hyperfine et effet Lamb-, tracer le diagramme d'énergie correspondant aux états  $n = 2$  recensés au 2). *Faire un schéma le plus clair possible même s'il n'est pas possible de respecter totalement les échelles.*

On donne:

$$A \hbar^2 (\text{MHz}) \approx 81,7 \frac{1}{j(j+1)n^3(l+1/2)} \text{ pour l'atome de deutérium,}$$

$$\text{Correction de structure fine } \Delta E_{SF} = \frac{-mc^2 Z^4 \alpha^4}{2n^3} \left[ \frac{2}{2j+1} - \frac{3}{4n} \right], \text{ avec } \alpha \approx 1/137,$$

$$\frac{mc^2 \alpha^2}{2} \approx 13,6 \text{ eV} \approx 3,29 \cdot 10^9 \text{ MHz.}$$