

**EXAMEN TERMINAL DE PHYSIQUE ATOMIQUE ET SUBATOMIQUE**

Lundi 25 juin 2012 - Durée 1h 30

TOUT DOCUMENT INTERDIT – PARTIES INDEPENDANTES

Interaction Electron-champs Electrique

On considère un atome d'hydrogène, interagissant avec une onde électromagnétique. Cette interaction induit plusieurs forces sur l'électron. Une force d'interaction avec le champ (qE) qui tend à « éloigner » l'électron et une force de rappel (Ar) qui tend à le faire osciller sur son orbite à la manière d'un oscillateur harmonique (vision classique).

Le Hamiltonien du système s'écrit : $H = H_0 + H_E + H_{\text{rap}}$

où H_0 est le Hamiltonien non perturbé de l'atome, H_E le Hamiltonien d'interaction avec le champ E et $V(r^2)$ le Hamiltonien associé à la force de rappel. Dans cet exercice, nous allons intéresser uniquement au hamiltonien associé à la force de rappel $V(r^2)$ induite par l'onde électromagnétique et comparer la description classique à la description quantique de cette oscillation en supposant $H_E \ll H_{\text{rap}}$.

Traitement Classique

La solution générale de l'équation du mouvement pour un oscillateur harmonique s'écrit :

$$q_{\text{classique}} = A \sin(\omega t + \delta)$$

1. Quel est la nature du mouvement. (Période, déphasage...)
2. Donner l'expression de l'impulsion p pour cet oscillateur de masse m .
3. Donner l'expression de l'énergie mécanique du système $E_{\text{classique}}$. La constante de rappel est incluse dans A .
4. Donner les valeurs moyennes $q_{\text{classique}}$, $p_{\text{classique}}$ par rapport au temps. On les notera $\langle q \rangle_c$ et $\langle p \rangle_c$.
5. Donner les valeurs moyennes $\langle q^2 \rangle$ et $\langle p^2 \rangle$ en fonction de $E_{\text{classique}}$ trouvées à la question 3, et montrer que les énergies cinétique moyenne et potentielle moyenne de l'oscillateur sont égales.

Traitement Quantique de l'oscillateur

Le Hamiltonien de l'électron soumis à la force de rappel s'écrit :

$$H_{\text{rap}} = 1/2(P^2 + Q^2) \text{ avec } Q = q(m\omega/\hbar)^{1/2} \text{ et } P = p(1/m\hbar\omega)^{1/2}.$$

Soient $|n\rangle$ les états propres associés à l'oscillateur. Les énergies du système s'écrivent $E_n = (n+1/2)\hbar\omega$. Contrairement au cas classique, les observables impulsions p et position q n'ont pas de valeurs définies. Elles sont dans cette description quantique associées à des distributions statistiques.

1. Soient les opérateurs $a = (1/2\hbar)^{1/2}[Q + iP]$ et $a^\dagger = (1/2\hbar)^{1/2}[Q - iP]$. Exprimer H en fonction a et a^\dagger . On donnera également l'expression de q et de p en fonction de a et a^\dagger .

Les valeurs propres de a et a^\dagger dans la base des $\{|n\rangle\}$ s'écrivent :

$$a^+ |n\rangle = (n+1)^{1/2} |n+1\rangle \quad (1)$$

$$a |n\rangle = n^{1/2} |n-1\rangle \quad (2)$$

- Donner l'expression, en notation de Dirac, des éléments de matrice associés à p et à q sur la base des états propres $\{|n\rangle\}$. Quels sont les éléments de matrice correspondant aux valeurs moyennes de $\langle p \rangle$ et $\langle q \rangle$ les calculer. Comparer au cas classique.
- Que vaut $\langle n|n' \rangle$? En déduire l'expression des éléments de matrice $\langle n|q^2|n' \rangle$ et $\langle n|p^2|n' \rangle$ en fonction de E_n .
- Comparer au cas classique et discuter de l'équivalence quantique / classique pour l'oscillateur.

Structure hyperfine sur les états $n = 2$ du deutérium

Le deutérium est un isotope de l'hydrogène dont le noyau est composé d'un proton et d'un neutron. Le spin nucléaire est égal à 1.

- Etablir l'expression générale de la correction énergétique due à l'interaction hyperfine à appliquer à un niveau de structure fine (n, l, j donnés). L'interaction hyperfine $H_{HF} = A \vec{I} \cdot \vec{J}$ est considérée comme une perturbation, \vec{I} désignant le spin nucléaire. On définit le moment cinétique total \vec{F} tel que $\vec{F} = \vec{I} + \vec{J}$.
- Faire le recensement des états $n = 2$ en tenant compte de la structure hyperfine. Calculer les valeurs de $A \hbar^2$ en MHz.
- Calculer les valeurs numériques -en MHz- de la correction énergétique associée à l'interaction hyperfine pour les états $n = 2$.
- Pour les états $n = 2$ de même j mais de l différents, il existe un écart énergétique de 1059 MHz -effet Lamb-, essentiellement dû à l'augmentation d'énergie de l'état l le plus faible. En tenant compte de tous les effets énoncés ci-dessus – effets de structures fine, hyperfine et effet Lamb-, tracer le diagramme d'énergie correspondant aux états $n = 2$ recensés au 2). *Faire un schéma le plus clair possible même s'il n'est pas possible de respecter totalement les échelles.*

On donne:

$$A \hbar^2 (\text{MHz}) \approx 81,7 \frac{1}{j(j+1)n^3(l+1/2)} \text{ pour l'atome de deutérium,}$$

$$\text{Correction de structure fine } \Delta E_{SF} = \frac{-mc^2 Z^4 \alpha^4}{2n^3} \left[\frac{2}{2j+1} - \frac{3}{4n} \right], \text{ avec } \alpha \approx 1/137,$$

$$\frac{mc^2 \alpha^2}{2} \approx 13,6 \text{ eV} \approx 3,29 \cdot 10^9 \text{ MHz.}$$